1 Wstęp

Teoria gier to niezwykle ciekawa dziedzina matematyki. Znając prawa rządzące niekórymi grami logicznymi możemy znacząco szybciej lub łatwiej osiągnąć wygraną. Zachęcam więc do lektury!

1.1 Teoria

Na początku naszych rozważań musimy założyć pewien bardzo ważny fakt - gracze grają optymalnie. Co to znaczy, że grają optymalnie? Mając pewną wygraną gracz wykonuje ruchy, które mu ją umożliwią. Innymi słowy jeden z graczy nie wykonuje ruchów, aby drugiemu ułatwić życie.

Mając już za sobą założenie optymalności, wprowadźmy pojęcie *pozycji wygrywającej* i *pozycji przegrywającej*.

Definicja 1. *Pozycja wygrywająca* to taki stan gry, z którego legalnym ruchem można przejść do chociaż jednej pozycji przegrywającej.

Definicja 2. *Pozycja przegrywająca* to taki stan gry, z którego legalnym ruchem można przejść tylko i wyłącznie do pozycji wygrywających lub nie ma możliwych ruchów (pozycja końcowa).

Warto wspomnieć jeszcze o typach gier. Wg kryterium końca gry wyróżniamy gry:

- *normal* - grę przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu
- *misère* - grę wygrywa gracz, który nie może wykonać ruchu

lub ze względu na możliwe ruchy:

- *impartial* (bezstronna) - każdy z graczy może wykonać w danej sytuacji ten sam zestaw ruchów
- *partisan* - każdy z graczy może mieć swój własny zestaw ruchów (np. podział na białe i czarne w szachach)

Znając już podstawowe założenia i definicje, czas przystąpić do gry Nim!

2 Jeden stos

Przez większą część artykułu będziemy zajmować się grą Nim, która się kończy, a do tego wygraną jednego z zawodników (nie ma remisów). W tym rozdziale rozpatrzmy Nima na jednym stosie.

Zasady gry 1 (Nim na jednym stosie)**.** Dany jest 1 stos kamieni. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na zabraniu ze stosu niezerowej liczby kamieni. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu.

Strategia wygrywająca jest tutaj oczywista. Wystarczy, że pierwszy gracz weźmie od razu cały stos. Wprowadźmy pewne urozmaicenie:

Zasady gry 2 (k-Nim na jednym stosie)**.** Dany jest 1 stos kamieni. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na zabraniu ze stosu 1, 2, ... lub k kamieni. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu.

Ten przypadek jest trochę ciekawszy. Będziemy chcieli reprezentować stan gry poprzez liczbę naturalną, będziemy ją nazywać *nimberem* (lub w skrócie *nim*). Zdefiniujmy jeszcze jedną funkcję pomocniczą *mex* (najmniejszy element niewystępujący w zbiorze):

$$\text{mex}(X) = \min\{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \notin X\}$$

Wówczas nimber gry (stanu G) wyraża się wzorem:

$$\text{nim}(G) = \text{mex}\{\text{nim}(G') : \text{z } G \text{ można dojść do } G'\} \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *Stan G jest pozycją przegrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy nim$(G) = 0$.*

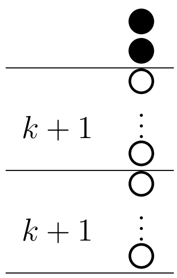
Dowód. Jeżeli $\text{nim}(G) = 0$ to z definicji fukcji mex nie możemy dojść do stanu o takim samym nimberze, czyli każdy ruch prowadzi do nimbera różnego od zera (pozycja przegrywająca). Gdy zaś $\text{nim}(G) \neq 0$, to ze stanu G możemy przejść do stanu o nimberze zerowym (pozycja wygrywająca). $\square$

Przyjrzyjmy się teraz jak będzie wyglądała funkcja nim dla k-Nima na jednym stosie (przyjmujemy oznaczenie G_i dla stanu gry o stosie wysokości i):

$$\begin{aligned}
\text{nim}(G_0) &= \text{mex}\{\} = 0 \\
\text{nim}(G_1) &= \text{mex}\{\text{nim}(G_0)\} = \text{mex}\{0\} = 1 \\
\text{nim}(G_2) &= \text{mex}\{\text{nim}(G_1), \text{nim}(G_0)\} = \text{mex}\{0, 1\} = 2 \\
&\vdots \\
\text{nim}(G_k) &= \text{mex}\{\text{nim}(G_{k-1}), ..., \text{nim}(G_0)\} = \text{mex}\{k-1, ..., 0\} = k \\
\text{nim}(G_{k+1}) &= \text{mex}\{\text{nim}(G_k), ..., \text{nim}(G_1)\} = \text{mex}\{k, ..., 1\} = 0 \\
\text{nim}(G_{k+2}) &= \text{mex}\{\text{nim}(G_{k+1}), \text{nim}(G_k), ..., \text{nim}(G_2)\} = \text{mex}\{0, k, ..., 2\} = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wartości powtarzają się cyklicznie od 0 do k, możemy więc wysnuć wzór:

$$\text{nim}(G_n) = n \mod (k+1) \tag{2}$$



Rysunek 1: Strategia w grze k-Nim

Potrafimy już określić, czy jesteśmy na pozycji wygrywającej, ale co wtedy? Wystarczy, że zabierzemy tyle kamieni, aby pozostała liczba była podzielna przez $k + 1$ (rys. 1). Zajmijmy się teraz ostatnim wariantem na jednym stosie.

Zasady gry 3 (Gra w odejmowanie)**.** Dany jest 1 stos kamieni i zbiór $P \subset \mathbb{N}_+$. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na zabraniu ze stosu $p \in P$ liczby kamieni. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu.

Jako zbiór P możemy przyjąć np. liczby pierwsze, wielokrtoności 7, liczby trójkątne itd.

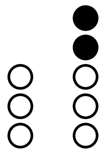
Wzór (1) oraz Twierdzenie 1 wciąż działają (nigdzie w dowodzie i w samym twierdzeniu i wzorze nic nie zakładaliśmy na temat możliwych ruchów). Tym razem tylko w ogólności nie mamy już tak pięknego wzoru jak (2) dla k-Nima.

3 Dwa stosy

Zajmijmy się teraz na chwilę podstawową wersją Nima jednak na 2 stosach.

Zasady gry 4 (Nim na 2 stosach)**.** Dane są 2 stosy kamieni. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na wybraniu jednego ze stosów i zabraniu z niego niezerowej liczby kamieni. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu.

Po chwili namysłu możemy zauważyć, że jeśli stosy są równej liczności, to pierwszy zawodnik nie może wygrać. Dlaczego? Wystarczy, aby drugi kopiował jego ruchy, tzn. zabierał taką samą ilość kamieni, ale z drugiego stosu. Co jednak, gdy stosy nie są równe? Tym razem 1. gracz zawsze wygra - wyrównuje stosy i później naśladuje ruchy drugiego. Ta bardzo prosta strategia jest zaskakująco przydatna w najróżniejszych zadaniach z teorii gier! Czas więc na coś trudniejszego.



Rysunek 2: Strategia w Nimie na 2 stosach

4 Wiele stosów

Zasady gry 5 (Nim na n stosach)**.** Danych jest n stosów kamieni. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na wybraniu jednego ze stosów i zabraniu z niego niezerowej liczby kamieni. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu.

Zauważmy, że tak naprawdę mamy n *podgier*, na których toczy się rozgrywka, a w turze gracz wybiera jedną z gier i wykonuje w niej ruch. Całą grę będziemy nazywać *sumą gier*.

Grą 5 zajmowali się Sprague i Grundy, którzy niezależnie znaleźli sposób radzenie sobie z takim problemem. Najpierw wprowadźmy pewne działanie.

XOR (oznaczany $\oplus$) jest działaniem dwuargumentowym na liczbach naturalnych. Aby *sksorować* dwie liczby musimy:

a) zapisać obie liczby w systemie dwójkowym

b) wykonać pisemne dodawanie (w systemie binarnym) na tych liczbach, ale bez przenoszeń

Innymi słowy wynikiem w słupku jest 1, jeżeli w tej kolumnie jest nieparzyście wiele jedynek, 0 gdy jest ich parzysta liczba (przydaje się to przy liczeniu xora większego zbioru).

Oto przykład operacji $12 \oplus 10 = 6$:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Xorowanie jest przemienne, łączne, posiada element neutralny 0 ($x \oplus 0 = x$), a elementem odwrotnym do x jest x ($x \oplus x = 0$). Skoro znamy już operację $\oplus$ to czas poznać twierdzenie:

Twierdzenie 2 (Sprague-Grundy'ego)**.** *Nimber całej gry G (w grach typu Nim), składającej się z n podgier o nimberach $x_1, x_2, ..., x_n$, niech wynosi $x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$. Wtedy nim$(G) = 0$ jest równoważne, że gracz pierwszy nie ma strategii wygrywającej.*

Dowód. Powyższe twierdzenie jest uogólnienieniem Tw. 1 dla sumy gier G. Dowód przeprowadzimy rozpatrując przypadki.

1° $\mathrm{nim}(G) = 0$
W tym przypadku ruch na dowolnym stosie zmienia nimber tego stosu (wynika to z definicji funkcji mex). Jeżeli zaś zmieni się tylko jedna liczba w wyrażeniu, to wynik xorowania również musi się zmienić (gdzieś zamieniła się 1 na 0 lub odwrotnie, więc w tej kolumnie zmieniła się parzystość liczby jedynek). Każdy ruch prowadzi więc do stanu o nimberze niezerowym.

2° $\mathrm{nim}(G) \neq 0$
Teraz z kolei chcemy pokazać, że istnieje chociaż 1 ruch do stanu o nimberze 0. Rozpatrzmy pierwszą jedynkę (od lewej strony) w zapisie binarnym liczby $\mathrm{nim}(G)$. Skoro znalazła się ona w $\mathrm{nim}(G)$, to musi być również na tej samej pozycji w liczbie x_i (dla pewnego i). Niech nowy nimber tej podgry wynosi $x'_i = x_i \oplus \mathrm{nim}(G)$ (na których pozycjach w $\mathrm{nim}(G)$ były jedynki, na tych samych pozycjach w x_i zmieniamy bit na przeciwny). Po pierwsze, nimber stanu gry ze zmienionym tylko tym stosem wynosi:

$$\begin{aligned}\mathrm{nim}(G') &= x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x'_i \oplus ... \oplus x_n = \\ &= x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x'_i \oplus ... \oplus x_n \oplus x_i \oplus x_i = \\ &= \mathrm{nim}(G) \oplus x_i \oplus x'_i = \\ &= \mathrm{nim}(G) \oplus x_i \oplus x_i \oplus \mathrm{nim}(G) = 0\end{aligned}$$

Musimy pokazać jeszcze, że taki ruch istnieje. Zauważmy, że $x'_i < x_i$, gdyż pierwszy od lewej zmieniany bit to 1 na 0, a zamiany na kolejnych pozycjach nie mogą zwiększyć liczby ponad początkową wartość. Teraz korzystając z definicji funkcji mex, wiemy, że z x_i możemy dojść do wszystkich stanów, których nimbery są mniejsze. To kończy dowód.

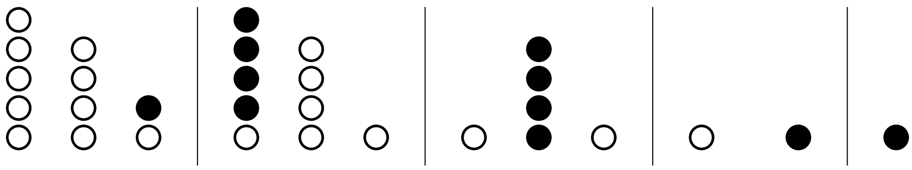
□

Posiadając potężne narzędzie jakim jest Tw. Sprague-Grundy'ego możemy analizować kolejne gry. Zacznijmy od już opisanej gry 5. Nimber pojedynczej podgry jest równy liczności tego słupka (Czytelnik Dociekliwy może to sprawdzić), więc nimber całej gry to po prostu xor po licznościach wszystkich stosów. Jeżeli jesteśmy w pozycji wygrywającej, to wykonujemy ruch, który jest opisany w dowodzie (patrz również rys. 3. Czytelnika Zainteresowanego zachęcam do sprawdzenia, że powyższe twierdzenie działa również dla poniższych gier:

Zasady gry 6 (k-Nim na n stosach)**.** Danych jest n stosów kamieni. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na wybraniu jednego stosu i zabraniu z niego 1, 2, ... lub k kamieni. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu.

Zasady gry 7 (Gra w odejmowanie na n stosach)**.** Danych jest n stosów kamieni i zbiór $P \subset \mathbb{N}_+$. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na wybraniu jednego stosu i zabraniu z niego $p \in P$ liczby kamieni. Przegrywa ten zawodnik, który nie może wykonać ruchu.

Zasady gry 8. Danych jest n ponumerowanych stosów kamieni oraz n zbiorów $P_i \subset \mathbb{N}_+$. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na wybraniu jednego stosu (oznaczmy jego numer przez k) i zabraniu z niego $p \in P_k$ liczby kamieni. Przegrywa ten zawodnik, który nie może wykonać ruchu.

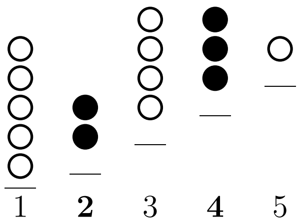


Rysunek 3: Przykładowa rozgrywka w Nima na 3 stosach

5 Inne gry

Zajmiemy się jeszcze grami podobnymi do Nima i nie tylko. Zacznijmy od:

Zasady gry 9 (Staircase Nim)**.** Danych jest n stosów kamieni ułożonych kolejno na schodach. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na wybraniu jednego stosu i przeniesieniu z niego niezerowej liczby kamieni na stos na najbliższym niższym stopniu, z najniższego stopnia nie można przenosić. Przegrywa ten zawodnik, który nie może wykonać ruchu.



Rysunek 4: Przykładowa gra Staircase Nim

Zauważmy, że na stosach tym razem może nam przybywać kamieni (a jednocześnie ubywać stopień wyżej). Początkowo nie wiadomo jak się za to zabrać. Okazuje się jednak prawdziwe poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Nimberowi gry Nim na $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ stosach utworzonych ze słupków o numerach parzystych w Staircase Nimie (zaciemnione na rys. 4) jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy gracz pierwszy nie ma strategii wygrywającej.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód rozpatrując kilka możliwych przypadków. Dla uproszczenia zapisu sumę gier G_1 i G_2 będę oznaczał $G_1 \cup G_2$.

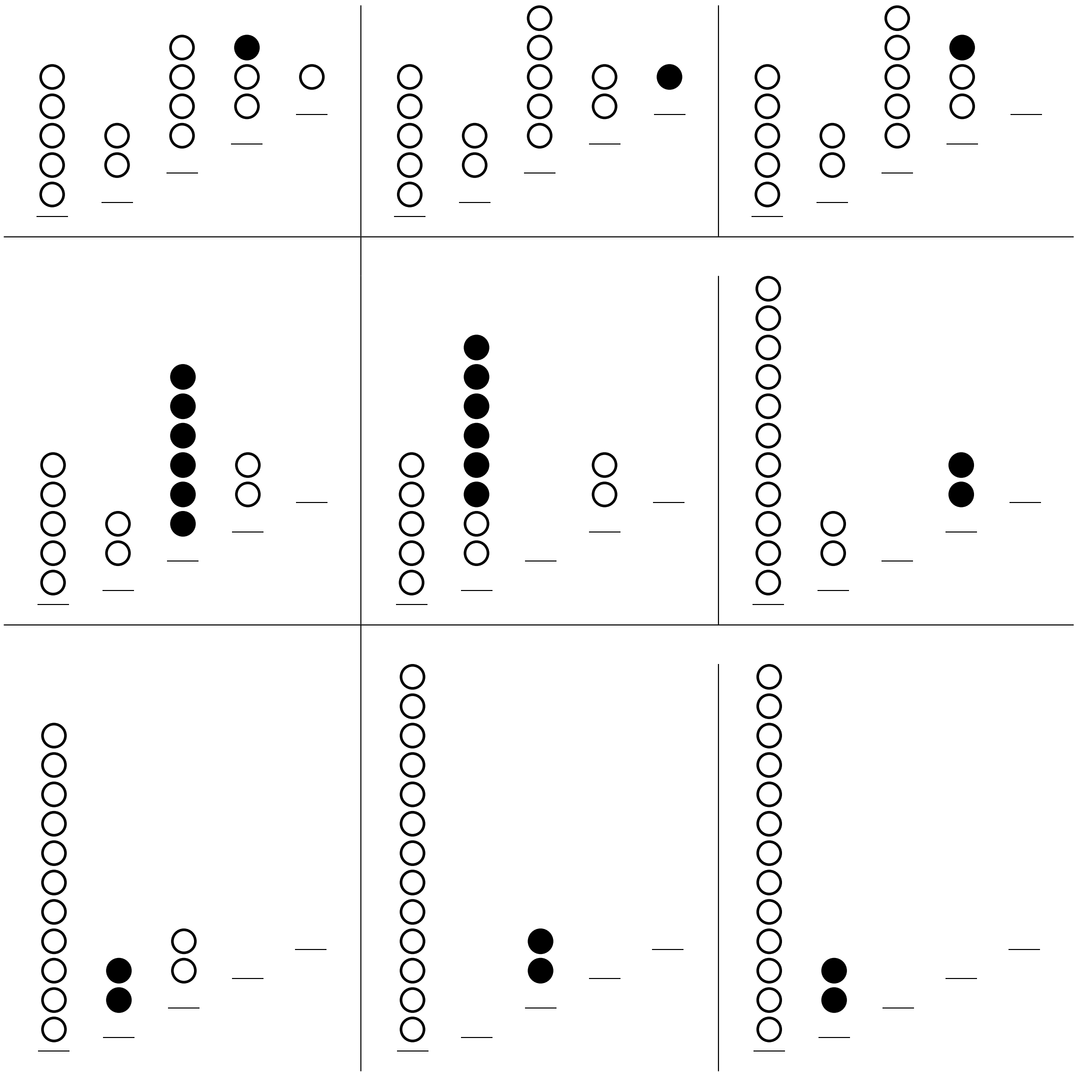
1° $\mathrm{nim}(G_2 \cup G_4 \cup ... \cup G_{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) = 0$
Pokażemy, że drugi gracz może wykonać ruch sprowadzający pierwszego z powrotem do zerowego nimbera.

a) Jeżeli gracz 1. wykona ruch przenoszenia kamieni ze stosu o numerze parzystym, to drugi gracz wykonuje ruch jak w grze 5 patrząc tylko na stosy o numerach parzystych, z tym, że zamiast zabierać kamienie to przenosi je stopień niżej. Nimber dla gracza 1 pozostaje dalej zerem.

b) Jeżeli gracz 1. wykona ruch przenoszenia kamieni ze stosu o numerze nieparzystym k to drugi zawodnik przenosi tyle samo kamieni ze stosu o numerze $k - 1$ (przesuwa dalej w dół te poruszone przez pierwszego). Po tych dwóch ruchach wysokości słupków o numerach parzystych nie zmieniły się, więc nimber dla gracza 1 pozostaje dalej zerem.

2° $\mathrm{nim}(G_2 \cup G_4 \cup ... \cup G_{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \neq 0$
Teraz pokażemy, że gracz 1. może sprowadzić gracza 2. do nimbera zerowego. Otóż jest to całkiem proste - wykonuje ruch patrząc na stosy o numerach parzystych i gra jak w grze 5, z tym, że zamiast zabierać kamienie to przenosi je stopień niżej.

Oczywistym jest, że gra kiedyś się zakończy (w każdym ruchu chociaż jeden kamień zbliża się do pierwszego stopnia). Pondato pokazaliśmy, że gdy gracz 1 wykona ruch z nimbera zerowego, to drugi zawsze może wykonać kolejne posunięcie, więc ruchów braknie zawodnikowi numer 1. Gdy zaś nimber jest niezerowy to gracz może sprowadzić go do zerowego. To kończy dowód. □



Rysunek 5: Przykładowa rozgrywka w Staircase Nima

Nadszedł czas na grę misère:

Zasady gry 10 (Antynim)**.** Danych jest n stosów kamieni. Dwaj gracze wykonują na przemian ruchy polegające na wybraniu jednego ze stosów i zabraniu z niego niezerowej liczby kamieni. Wygrywa ten, który nie może wykonać ruchu.

Innymi słowy chcemy przegrać w grę 5. Wbrew pozorom nie jest to takie łatwe, gdy obaj gracze dążą do „porażki”. I chociaż zasady gry zmieniły się diametralnie, to istnienie strategii wygrywającej w Antynimie jest ściśle związane z normalną rozgrywką.

Twierdzenie 4. *Gracz zaczynający posiada strategię wygrywającą w grze Antynim wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków:*

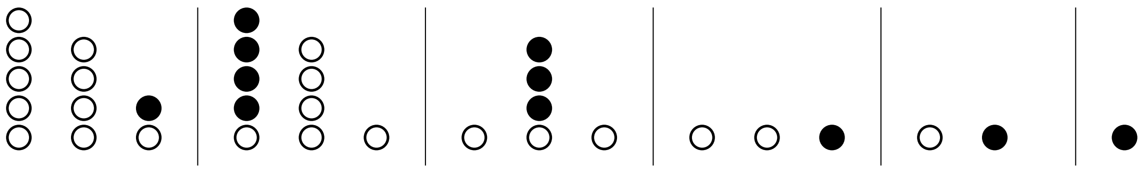
- *gra składa się z parzystej liczby stosów tylko wysokości 1*

- *nimber liczony standardowo dla gry 5 jest różny od zera i gra nie składa się z nieparzystej liczby stosów kamieni o wysokościach 1*

Dowód. Otóż popatrzmy najpierw na grę, w której mamy n stosów tylko wysokości 1. Jeżeli n jest parzyste, to wygrywa gracz 1, w przeciwnym przypadku zawodnik 2 (jedynym możliwym ruchem dla każdego z graczy jest likwidacja kolejnych stosów).

Rozpatrzmy teraz grę, która składa się ze słupka z co najmniej 2 kamieniami, a pozostałe (jeżeli są) zawierają po 1 kamieniu. Strategię wygrywającą ma zawodnik numer 1, gdyż może doprowadzić przeciwnika do pozycji przegrywającej omówionej wcześniej (zależnie od ilości „jedynek” zabiera cały wysoki stos lub zostawia z niego jeden kamień). Ponadto zauważmy, że normalnie liczony nimber tej gry jest niezerowy.

Gracze mogą początkowo prowadzić rozgrywkę jak w normalnym Nimie. W pewnym momencie dojdą do wyżej opisanego stanu. Gracz, który dojdzie do tego stanu, wygra, a ponieważ stan ten ma nimber $\neq 0$, to dojdzie do niego zawodnik 1, jeśli na początku miał też niezerowy nimber, drugi gracz w przeciwnym wypadku. □



Rysunek 6: Przykładowa rozgrywka w Antynima na 3 stosach - por. rys. 3

6 Podsumowanie

W tym artykule chciałem zapoznać z ciekawym działem matematyki jakim jest teoria gier. Gra Nim jest sztandarowym przykładem, o którym słyszał każdy, kto miał cokolwiek do czynienia z grami w matematyce. Często do tej gry wprowadza się wiele urozmaiceń, niektóre warianty pokazałem razem z dowodami strategii wygrywających. Czytelnik Zainteresowany znajdzie więcej materiałów, poniżej jednak podaję krótką ściągę.

→ Wykłady z Algorytmiki Stosowanej - Wykład 6. Teoria gier (`http://was.zaa.mimuw.edu.pl/?q=node/19`)

→ B. Szreder, „Elementarz chakiera”

→ W. Kuropatwa, W. Nadara, „O trzech grach na trzech stosach” (Delta 6/2013)

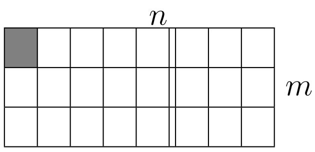
→ T. S. Ferguson, „Game Theory”

Słowa kluczowe: nim, nimber, nimliczba, nimsuma, xor, teoria gier.

Dla tych, którzy chcieliby jeszcze trochę pomyśleć, trzy zadania:

Zadanie 1 (Gra EasyChomp)**.** Gra rozgrywa się na prostokątnej tabliczce czekolady $n \times m$. Lewy górny kawałek jest zatruty. Gracze na przemian łamią czekoladę wzdłuż jednego nacięcia i zjadają jedną część. Przegrywa gracz, który musi zjeść zatruty kawałek. W jakim wypadku pierwszy z graczy wygra?

Zadanie 2 (Zad. 4 64OM)**.** Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?



Rysunek 7: Przykładowy ruch w grze EasyChomp

Zadanie 3. Gra odbywa się na długim pasie podzielonym na 1001 kwadratów. Gracze mają do dyspozycji nieskończenie wiele klocków składających się z 3 kwadratów jednostkowych i układają je na przemian na planszy. Grę przegrywa zawodnik, który nie może wykonać ruchu. Czy pierwszy gracz ma strategię wygrywającą? Jeśli tak, to jak ma grać, aby wygrać?

Rysunek 8: Przykładowa rozgrywka w grze z zadania 3